9ο μάθημα

10/12/19

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Τα ιδιοδ/τα ή ιδιοσυν/σεις $|f\rangle$, κανονικού τελεστή A, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια

<u>ΑΠΟΔ.</u>:

Έστω ο A κανονικός τελεστής $(AA^+ = A^+A)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

τότε $\begin{cases} A\cdot|f_1\rangle = \lambda_1\cdot|f_1\rangle \\ A\cdot|f_2\rangle = \lambda_2\cdot|f_2\rangle \end{cases}$ κ. αν $A\cdot|f\rangle = \lambda\cdot|f\rangle$ $\Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$

Πρέπει ν.δ.ο. $\langle f_1|f_2\rangle = 0$

$\langle f_2|A\cdot|f_1\rangle = \langle f_2|\lambda_1\,|f_1\rangle = \lambda_1\cdot\langle f_2|f_1\rangle$

$\langle f_1|A\cdot|f_2\rangle = \langle f_1|\lambda_2\cdot|f_2\rangle = \lambda_2\cdot\langle f_1|f_2\rangle$

<u>Όμως</u>: $\langle f_1|\cdot A\cdot|f_2\rangle = \langle f_2|\cdot A^+\cdot|f_1\rangle^* = \langle f_2|\lambda_1^*|f_1\rangle^*$
$= \lambda_1\cdot\langle f_2|f_1\rangle^* = \lambda_1\cdot\langle f_1|f_2\rangle$

Δηλ. $\lambda_1\cdot\langle f_1|f_2\rangle = \lambda_2\cdot\langle f_1|f_2\rangle$ επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$, πρέπει $\langle f_1|f_2\rangle = 0$

ΘΕΜΑ

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνονται οι τελεστές k κ. S : $k = e^{iS}$

α) Δ.ο. αν $S = S^+$ τότε $k^+ = k^{-1}$

b) Αν $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ να βρεθεί ο τελεστής k

Συστήματα Sturm - Liouville

$Lu = \lambda u$, $L = a(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\cdot\frac{d}{dx} + \gamma(x)$

$\Downarrow$

$$a(x)\cdot\frac{d^2u(x)}{dx^2} + b(x)\cdot\frac{du(x)}{dx} + \gamma(x)\cdot u(x) = \lambda u(x)$$

Χρησιμοποιώντας τη συν/ση βάρους $w(x)$ τ.ω.

$a w'(x) + (a' - b)w = 0$

$\Rightarrow w(x) = \left|\frac{c}{a(x)}\right|\cdot e^{\int \frac{b}{a}dx}$, $w(x) > 0$

τότε ορίζουμε το σύστημα:

$Lu = \lambda wu$, όπου $L = \frac{d}{dx}\left(w(x)a(x)\frac{d}{dx}\right) + j(x)w(x)$

με συνοριακές συνθήκες:

$w(x)\, a(x) \cdot [f^* g' - g f^{*\prime}]_a^b = 0$

τότε ο τελεστής είναι αυτοπροσαρτημένος κ. $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Παρατήρηση</u>: Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ορθογώνια πολ/μα.

$\boxed{\text{Πχ}}$ • Τα Legendre παράγονται ως λύση της Δ.Ε.

$$\underbrace{(1-x^2)}_{a(x)}\frac{d^2y}{dx^2} \underbrace{-2x}_{b(x)}\frac{dy}{dx} + \underbrace{l(l+1)}_{j(x)}y = 0 \;,\; x\in[-1,1]$$

ΣΔΕ 2ης τ. του β. γραμμ. ομογ.
(μη στθ. συντελ.)

$$w(x) = \frac{1}{1-x^2}\cdot e^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx}$$

• Δ.Ε. Hermite : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\cdot\frac{dy}{dx} + 2\lambda y = 0 \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$$w(x) = e^{-x^2}$$

• Δ.Ε. Laguerre : $\underbrace{x}_{a(x)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{(v+1-x)}_{b(x)}\frac{dy}{dx} + \underbrace{j_0 y}_{j(x)}$

v, j_0 : στθ. $x\in(0,\infty)$

$$w(x) = x^v e^{-x} = \left(\frac{1}{x}\cdot e^{\int \frac{v+1-x}{x}dx} = \right.$$

$$\left. = x^{-1}\cdot e^{v+1\int \frac{1}{x}dx} = x^{-1}x^{v+1}e^{-\int dx} = x^v e^{-x}\right)$$

<u>Γενίκευση</u>: Θεωρούμε το Π.Σ.Τ. :

$$\left\{ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\cdot y}_{L[y]} + \lambda w(x) y = 0 \right.$$

$$\begin{cases} Ly = \lambda y \quad \text{με συνοριακές συνθήκες:} \\ \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 p(a) y'(a) = 0 & \text{με } a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \\ b_1 y(b) + b_2 p(b) y'(b) = 0 & b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Τότε το πρόβλημα S.-L. λέγεται:

a) κανονικό (regular) αν $p, w > 0$ στο $[a,b]$

b) ιδιάζον (singular) αν $p > 0$, $p(a) = p(b) = 0$, $w \geq 0$

c) περιοδικό (periodic) αν $p(a) = p(b)$, $p, w > 0$ κ. $y(a) = y(b)$
$y'(a) = y'(b)$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Κάθε 2ης τάξης γραμμ. τελεστής μπορεί να γραφεί στη μορφή S.-L.

<u>ΑΠΟΔ.</u>:

Θεωρούμε τη Δ.Ε.: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ (*)

Έστω η $w(x)$ (συνάρτ. βάρους), τότε:

$$\frac{a_2 w y''}{a_2} + \frac{w a_1 y'}{a_2} + \frac{w a_0 y}{a_2} = \frac{wf}{a_2}, \quad a_2(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow wy'' + w \cdot \frac{a_1}{a_2} y' + w \frac{a_0}{a_2} y = \frac{wf}{a_2}$$

Θα θέλαμε: $wy'' + w \frac{a_1}{a_2} \cdot y' = (wy')' = w'y' + wy''$

δηλ. $w' = w \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \ln w = \int \frac{a_1}{a_2} dx \Rightarrow \boxed{w = e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}}$

Τότε το πρόβλημα (*) γράφεται ως πρόβλημα S.-L.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) \cdot y = F(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(w(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y = F(x) \\ p(x) = w(x) = e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}, \quad q(x) = w(x) \cdot \frac{a_0}{a_2}, \quad F(x) = \frac{w(x) f(x)}{a_2} \end{cases}$$

Ιδιότητες:

1) Αν $\exists$ ιδιοτιμές S.-L. τότε είναι πραγματικές

Απ: Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\left.\begin{array}{l} L[y] + \lambda w y = 0 \\ L[\bar{y}] + \bar{\lambda} w \bar{y} = 0 \end{array}\right\}$

όπου $L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y$

κ' με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$\left.\begin{array}{l} L[y]\cdot\bar{y} + \lambda w |y|^2 = 0 \\ L[\bar{y}]\cdot y + \bar{\lambda} w |y|^2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} [p(x)\cdot(y'\bar{y} - \bar{y}'y)]' + (\lambda - \bar{\lambda}) w |y|^2 = 0$

Ολοκληρώνουμε στο $[a,b]$

$\Rightarrow p(y'\bar{y} - \bar{y}'y)\Big|_a^b + (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \int_a^b w |y|^2 dx = 0$

$\Rightarrow \cancel{p(y'\bar{y} - \bar{y}'y)\Big|_a^b} \to 0$ από συνορ. τιμές $= -(\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \int_a^b w |y|^2 dx$

$\Rightarrow -(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\int_a^b w |y|^2 dx}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, άρα $\lambda \in \mathbb{R}$ ∎

2) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $w(x)$.

Απ: Έστω u, v ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ, μ, αντίστοιχα, του συνόλου ιδιοτιμών.

Όπως κ' στην προηγ. αποδ. έχουμε

$[p(u'v - v'u)]_a^b = -(\lambda - \mu) \cdot \int_a^b w u v \, dx$

Όμως επειδή $\lambda \neq \mu$ τότε $\int_a^b w u v \, dx = 0$,

άρα οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες. ∎

Παρατήρηση: Ιδιοσυναρτήσεις που αντιστ. σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογ. ως προς τη συνάρτηση βάρους, $w(x)$.

Δηλ. ορίζονται το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx$$

οι ιδιοσυναρτήσεις ϕ_n ικανοποιούν το εξής:

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \langle \phi_n | \phi_m \rangle \cdot \delta_{nm}$$

3) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων είναι πλήρες.

Δηλ. κάθε $f(x)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad c_n = \frac{\langle f | \phi_n \rangle}{\langle \phi_n | \phi_n \rangle} = \frac{\langle f | \phi_n \rangle}{\| \phi_n \|^2}$$

· $\boxed{\text{Π.χ.}}$ • Fourier

• $P_n(x)$, $x \in [a, b]$,

$$c_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) P_n(x) dx}{\int_a^b w(x) \cdot P_n^2(x) dx}$$

Εφαρμογές Μαθηματικής Φυσικής

Σειρές Fourier (Σειρές ημιτόνων)

Π.Σ.Τ.: $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$

Έχουμε δει ότι $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Δηλ. κάθε συν/ση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\text{με } c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\langle y_n | y_n \rangle}$$

Σειρές συνημιτόνων:

Π.Σ.Τ.: $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$ τότε $y_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

άρα κάθε συν/ση, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{με } c_0 = \frac{\langle y_0 | f \rangle}{\langle y_0 | y_0 \rangle}, \quad c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\langle y_n | y_n \rangle}$$

Πλήρης σειρά Fourier

Π.Σ.Τ. : $\left\{ \begin{array}{l} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{array} \right\}$

Τότε θα παίρνουμε την πλήρη σειρά Fourier

με ιδιοσυν/σεις : $\left\{ \begin{array}{ll} y_n^{(1)} = \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) , & n = 0,1,2,3,\ldots \\ y_n^{(2)} = \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) , & n = 1,2,3,\ldots \end{array} \right.$

ιδιοτιμή : $\boxed{\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}}$